

## Темы, включаемые в задания, предлагаемые участникам олимпиады

### 7 класс

#### Арифметика

- Действия с натуральными числами.
- Степень с натуральным показателем.
- Действия с обыкновенными и десятичными дробями.
- Сравнение и округление дробей.
- Измерения, приближения, проценты.

#### Комбинаторика и логика

- Полный перебор, рациональная организация перебора.
- Идея упорядочивания в комбинаторных и алгебраических задачах.
- Решения задач от противного и принцип Дирихле.
- Принцип крайнего.
- Круги Эйлера и формула включений-исключений.
- Логические задачи. Анализ истинных и ложных высказываний. Таблицы истинности. Задачи про рыцарей и лжецов. Задачи про мудрецов.
- Четность: арифметика, разбиение на пары, чередование.

#### Алгебра и элементы математического анализа

- Алгебраические преобразования и формулы сокращенного умножения.
- Текстовые задачи: движение по прямой и по кругу, задачи на работу, сплав и смеси, сводящиеся к пропорциям или линейным уравнениям.
- Линейные уравнения с одной переменной.
- Базовые понятия делимости натуральных чисел.
- Десятичная запись числа и признаки делимости.
- Понятие функции и ее графика.
- Система координат на плоскости.
- Простейшие задачи с параметром.

#### Геометрия

- Начальные понятия геометрии: точка, прямая, плоскость, луч, угол.
- Параллельные и пересекающиеся прямые.
- Пропорциональные отрезки.
- Треугольники: признаки равенства, свойства и признаки равнобедренных и прямоугольных треугольников.
- Неравенство о соотношении углов и сторон в треугольнике. Неравенство треугольника.
- Измерение геометрических величин: длина, периметр и площадь фигур, градусная мера угла.

## Добавляющиеся темы задач для 8 класса.

### Арифметика

- Действия с рациональными числами.
- Степень с целым показателем.
- Действия с дробями.
- Сравнение и округление десятичных, смешанных и обыкновенных дробей.

### Комбинаторика и логика

- Процессы: инварианты и полуинварианты, закливание.
- Конструкции: переправы, переливания, разрезания, состав фигуры, раскраски.
- Подсчет числа способов. Задачи на соответствия. Правила сложения и умножения. Факториал.
- Игры: симметричные стратегии, выигрышные и проигрышные позиции, передача хода.
- Построение специальной конструкции. Пример, контрпример, общий случай.

### Алгебра и элементы математического анализа

- Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения.
- Текстовые задачи: движение, работа, сплав и смеси. Алгебраический метод.
- Разложение числа на простые множители. Основная теорема арифметики. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Линейные диофантовы уравнения.
- Системы счисления.
- Рациональные выражения и их преобразования.
- Квадратный трехчлен: формулы корней, теорема Виета, график и его свойства.
- Действия с многочленами. Степень многочлена. Корни. Разложение многочлена на множители.
- Уравнения с одной неизвестной.
- Система линейных уравнений.
- Неравенства с одной неизвестной.
- Функция. Способы задания функций. Область определения и область значений функции.
- Линейная функция, ее свойства и график, геометрический смысл коэффициентов.
- График функции, возрастание, убывание функции, нули функции, сохранение знака на промежутке, наибольшее и наименьшее значения. Чтение графиков функций.
- Квадратичная функция, ее свойства; парабола, ось симметрии параболы, координаты вершины параболы.

### Геометрия

- Свойства медиан, биссектрис, высот треугольника.
- Свойства и признаки четырехугольников: параллелограмм, трапеция, ромб, прямоугольник.

- Теорема Фалеса.
- Теорема Пифагора.
- Замечательные точки треугольника.
- Дополнительные построения, связанные с осевой и центральной симметрией. Перекладывание и продолжение отрезков. Удвоение медианы.
- Параллелограмм Вариньона.
- Многоугольники на решетке.

### **Добавляющиеся темы задач для 9 класса.**

#### **Арифметика**

- Действия с действительными числами.
- Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел.
- Арифметические действия над действительными числами. Свойства арифметических действий.
- Степень с натуральным, целым, рациональным показателем, вычисление значений выражений, содержащих степени.
- Модуль числа, геометрический смысл модуля.
- Арифметический корень второй и третьей степени.

#### **Комбинаторика и логика**

- Правила умножения и сложения в комбинаторных задачах
- Перестановки. Размещения. Сочетания.
- Рекуррентные соотношения, числа Фибоначчи.

#### **Алгебра и элементы математического анализа**

- Текстовые задачи на составление систем уравнений и неравенств.
- Арифметика остатков, сравнения по модулю. Уравнения в целых числах.
- Работа с иррациональными числами.
- Неравенства. Неравенства о средних.
- Многочлены: теорема Безу, теорема о рациональных корнях, теорема Виета.
- Рациональные уравнения, неравенства и системы.
- Системы с несколькими неизвестными.
- Простейшие иррациональные уравнения и неравенства.
- Числовые последовательности.
- Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы общего члена арифметической и геометрической прогрессий и суммы  $n$  первых членов арифметической и геометрической прогрессий.
- Сложные проценты.
- Графики функций: корень квадратный, корень кубический, модуль.
- Множества точек на плоскости.

- Функции минимума и максимума. Экстремальные задачи.
- Использование графиков функций для решения уравнений и систем
- Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы.
- Преобразования графиков функций: сдвиг, растяжение, отражение.
- Дробно-линейные функции. Степенные функции.
- Параметры в уравнениях и неравенствах.

## Геометрия

- Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от  $0$  до  $180^\circ$ ; приведение к острому углу. Решение прямоугольных треугольников.
- Основное тригонометрическое тождество. Формулы, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс одного и того же угла. Теорема косинусов и теорема синусов; примеры их применения для вычисления элементов треугольника.
- Выпуклые многоугольники.
- Вписанные углы, угол между касательной и хордой. Вписанные четырехугольники и вспомогательные окружности.
- Отрезки касательных и описанные четырехугольники.
- Пропорциональные отрезки, связанные с окружностью.
- Вписанные и описанные многоугольники.
- Правильные многоугольники.
- Касательная и секущая к окружности; равенство касательных, проведенных из одной точки.
- Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника.
- Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника.
- Понятие о площади плоских фигур. Равносоставленные и равновеликие фигуры.
- Площадь треугольника, прямоугольника, параллелограмма и трапеции (основные формулы). Формулы, выражающие площадь треугольника через две стороны и угол между ними.
- Площадь круга и площадь сектора.
- Связь между площадями подобных фигур.
- Вектор. Длина (модуль) вектора. Координаты вектора. Равенство векторов.
- Операции над векторами: умножение на число, сложение, разложение, скалярное произведение. Угол между векторами.
- Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками плоскости.

- Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых.
- Уравнение окружности с центром в начале координат и в произвольной точке.
- Теоремы Чевы и Менелая.
- Вписанные углы, угол между касательной и хордой. Вписанные четырехугольники и вспомогательные окружности.
- Отрезки касательных и описанные четырехугольники.

### **Добавляющиеся темы задач для 10 класса.**

#### **Графы.**

- Теория графов. Перевод условия задачи на язык графов. Лемма о рукопожатиях. Связность. Двудольные графы и подсчет двумя способами. Деревья. Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы в графах. Планарные графы и формула Эйлера.

#### **Алгебра и элементы математического анализа**

- Иррациональные выражения и действия над ними.
- Иррациональные уравнения и неравенства.
- Функциональные уравнения и неравенства.
- Функции целой и дробной частей числа.

#### **Геометрия**

- Основные понятия стереометрии: прямая, плоскость, пространственные фигуры.
- Параллельность прямой и плоскости.
- Перпендикулярность прямой и плоскости.

### **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

#### **Основная учебная литература:**

1. Мордкович А. Г., Семенов П.В., Александрова Л.А. Алгебра 7 класс. Учебник и задачник. М.: ВЕНТАНА-ГРАФ, 2022
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. Алгебра 7 класс (Углубленный уровень). М.: Просвещение, 2022.
3. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра 7 класс. Учебник. М.: Просвещение, 2013.
4. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н Алгебра: 8 кл. М.: Просвещение, 2022.
5. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. Алгебра: 9 кл. М.: Просвещение, 2022.
6. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: 8–9 кл. М.: Просвещение, 2019.
7. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра: в 2 ч. Ч. 1, Ч. 2: Учебник для 8 кл. М.: Мнемозина, 2022.
8. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра 9 класс. Учебник и задачник. М.: Мнемозина, 2022

9. Шарыгин И. Ф. Геометрия: 7–9 кл. М.: Дрофа, 2020.
10. Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Прасолов В. В. Геометрия: 7 кл. М.: Просвещение, 2022.
11. Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Прасолов В. В. Геометрия: 8 кл. М.: Просвещение, 2022.
12. Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Прасолов В. В. Геометрия: 9 кл. М.: Просвещение, 2022.
13. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. и др. Геометрия: 8 кл. М.: Просвещение, 2022.
14. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. и др. Геометрия: 9 кл. М.: Просвещение, 2022.

**Дополнительная учебная литература:**

15. Звавич Л.И., Аверьянов Д.И., Пигарев Б.П., Трушанина Т.Н. Задания по математике для подготовки к письменному экзамену в 9 классе. М.: Просвещение, 2007
16. Зив Б. Г. Задачи к урокам геометрии: 7–11 кл. СПб.: Петроглиф; Виктория плюс, 2012.
17. Шарыгин И. Ф. Геометрия. Планиметрия: 9–11 кла. М.: Дрофа, 2001.
18. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006.
19. Всероссийская олимпиада школьников по математике: 1993–2009: Задачи и решения / под ред. Н. Х. Агаханова. М.: МЦНМО, 2017.
20. С.А.Генкин, И.В.Итенберг, Д.В.Фомин. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.
21. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс. М.: АСТ, Астрель, 2005.

**Интернет-ресурсы:**

- <http://spbu.ru> (официальный сайт СПбГУ)
- <https://abiturient.spbu.ru> (официальный сайт для поступающих в СПбГУ)
- <http://agym.spbu.ru> (официальный сайт Академической гимназии СПбГУ)
- <http://rsr-olymp.ru> (официальный сайт Российского совета олимпиад школьников)
- <http://olympiada.spbu.ru/> (официальный сайт олимпиады школьников СПбГУ)
- <http://problems.ru> (тематическая коллекция задач по математике с решениями МЦНМО)
- <http://olympiada.ru> (сборники заданий всех этапов олимпиад ВОШ и РСОШ за последние годы)
- <https://math-oge.sdangia.ru/.ru> (образовательный портал для подготовки к экзаменам)

## **Структура варианта задания Олимпиады Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ по математике**

Олимпиада проводится для 7х, 8х, 9х, 10х классов.

Задание Олимпиады содержит семь задач разного уровня сложности.

Задачи 1-2 по уровню сложности соответствуют углубленному уровню изучения математики в профильных классах и оцениваются максимально по 5 баллов каждая. Задачи 3-5 приближенно соответствуют муниципальному этапу Всероссийской олимпиады и оцениваются по 10 баллов каждая. Более сложные задачи 6 и 7 оцениваются по 15 баллов каждая. Для получения максимального балла за задачу необходимо привести ответ и полное обоснованное решение задачи. Максимально возможный балл за все олимпиадное задание – 70 баллов.

Продолжительность выполнения задания – 3 часа 30 минут.

На фотографирование (сканирование) решения и его отправку отводится ориентировочно 30 минут.

Пользоваться калькулятором, а также справочными материалами не разрешается.

Перечень возможных тем задач для последующих классов включает в себя темы задач предыдущих классов.

## Олимпиада Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

### Задание для 7 класса

1. На полке стояли красные тетради. Между каждой парой этих тетрадей поставили синюю тетрадь. После этого между каждой синей и красной тетрадью поставили зеленую тетрадь. В результате на полке оказалось 45 тетрадей. Сколько красных тетрадей стояло на полке?
2. Сравните числа.  
 $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$  и  $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}\right)$
3. Упростите выражение  $\frac{27xyz - (x+y+z)^3}{9xyz - (z+y)^3}$ , если числа  $x, y, z$  положительны,  
и  $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = 1$
4. Если у натурального числа зачеркнуть последнюю цифру, то оно уменьшится в 13 раз. Найдите все такие числа.
5. Графики функций  $f(x) = x^3 - x^2 - a$  и  $g(x) = x^2 - 4x + a$  пересекаются в точке, расположенной на оси абсцисс. Найдите значение параметра  $a$  (указать все возможные значения).
6. В городе имеются два автобусных парка, и все автобусы в городе покрашены или в белый, или в лазурный цвет. Число автобусов первого парка, покрашенных в белый цвет, равно числу автобусов второго парка, покрашенных в лазурный цвет. Каких автобусов в городе больше – покрашенных в белый цвет или принадлежащих второму парку?
7. Буквами  $a, b, c, d$  обозначены числа 1, 2, 3, 4 в некотором порядке. Укажите, какое именно из указанных чисел обозначает каждая из букв, если  
 $(d - a)(c - b) = d - b$

*Продолжительность выполнения задания – 3 часа 30 минут.*



## Олимпиада Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

### Задание для 8 класса

1. В магазине проводится акция – за каждую покупку выдается билет беспроигрышной лотереи. Стерев защитный слой на билете, покупатель узнает, какой один приз ему полагается: ложка, пакет чипсов, шоколадка, минеральная вода, блокнотик. Какое минимальное количество покупок должен совершить Петя, чтобы гарантированно получить три любых одинаковых приза?
2. Сравните числа.  
$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{300}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$
3. Упростите выражение  $\frac{3xyz-15z^3}{9xyz-(z+y)^3}$ , если  $x^2 - 4xy + 5y^2 - 4yz + 4z^2 = 0$
4. График функции  $f(x)$ , заданной формулой  $f(x) = k|x - b| + b - 6$ , проходит через точки  $(2;5)$  и  $(12;5)$  на координатной плоскости. Найдите значения параметров  $k$  и  $b$  (укажите все возможные значения).
5. Умножение на 9 изменяет порядок цифр некоторого четырехзначного числа на противоположный. Какое это число? Укажите все возможные решения.
6. Решите уравнение  $x^2 - 5[x] - 3 = 0$ , где символ  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .
7. Натуральные числа  $a, b, c, d$  различны и  $(c - a)(b - d)(d - a) = 1$ . Расположите числа  $a, b, c, d$  в порядке возрастания.

*Продолжительность выполнения задания – 3 часа 30 минут.*

## Олимпиада Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

### Задание для 9 класса

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $y - x = |x^2 - y^2|$ .
2. Сравните числа  $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$  и  $\left(\frac{1}{10000} + \frac{1}{10001} + \frac{1}{10002} + \dots + \frac{1}{19999}\right)$
3. Решите неравенство  $\min\left(\frac{3x-15}{10}; \frac{5x-3}{3}\right) < \min\left(\frac{15x-9}{10}; \frac{x-5}{3}\right)$ , где символ вида  $\min(a; b)$  обозначает наименьшее из двух, стоящих под знаком минимума чисел  $a$  и  $b$  (или наименьшее из двух стоящих под знаком минимума выражений).
4. Плоские фигуры  $A$ ,  $B$  и  $C$  площадью  $20 \text{ см}^2$ ,  $30 \text{ см}^2$  и  $40 \text{ см}^2$ , соответственно, лежат в круге площадью  $100 \text{ см}^2$ . Площадь общей части трех фигур  $A$ ,  $B$  и  $C$  равна  $5 \text{ см}^2$ . Какое наибольшее значение может иметь площадь множества тех точек круга, которые не принадлежат ни одной из фигур  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ?
5. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 = 50000003$  не имеет решений в целых числах.
6. Ломаная  $ABCD$  на координатной плоскости имеет вершины в точках  $A = (0; 1)$ ,  $B = (2; 5)$ ,  $C = (4; 1)$ ,  $D = (9; 11)$ . Отрезок  $EF$  соединяет точки  $E = (0; 2)$ ,  $F = (9; 5)$ . На оси абсцисс расположена точка  $P$ , лежащая между точками  $(0; 0)$  и  $(9; 0)$ , через которую проведена прямая  $l$ , параллельная оси ординат. При этом площадь фигуры, ограниченной осями координат, прямой  $l$  и соответствующей частью отрезка  $EF$  совпадает с площадью, ограниченной осями координат, прямой  $l$  и соответствующей частью ломаной  $ABCD$ . Найти возможные значения абсциссы точки  $P$  при этих условиях.
7. В треугольнике  $ABC$  две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Какие значения может принимать отношение  $p$  наименьшей из сторон треугольника  $ABC$  к наибольшей?

Продолжительность выполнения задания – 3 часа 30 минут.

Олимпиада Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

Задание для 10 класса

- 100 учеников с седьмого по одиннадцатый класс написали суммарно 110 контрольных работ, каждый не меньше одной. Все ученики одного класса (одной параллели) написали равное число контрольных, а ученики разных классов (разных параллелей) – разное. Сколько учеников написали по две контрольные?
- Сравните числа  $0,543215432154321\dots$  и  $\left(\frac{1}{54321} + \frac{1}{54322} + \frac{1}{54323} + \dots + \frac{1}{108640}\right)$
- Упростите выражение  $\left(\frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2y-1} + \frac{\sqrt{4y^2-20y+25}}{2x-5}\right)$ , если числа  $x$  и  $y$  положительны и  $\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(y + \frac{2}{y}\right) = 8$
- Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства  $\frac{3x^3}{x^6 + x^3 + 1} > \frac{x^2 - 20x + 421}{x^2 - 41x + 419}$
- При каких значениях параметра  $a$  длина интервала, являющегося областью решений неравенства  $\sqrt{3ax - x^2} \geq a - x$  равна  $2 + \sqrt{2}$ ?
- Треугольник, составленный из высот треугольника  $ABC$  оказался подобным исходному. Какие значения может принимать отношение  $p$  наименьшей из сторон треугольника  $ABC$  к наибольшей?
- Найдите все функции  $f(x)$ , определенные на множестве всех действительных чисел, такие, что для любых значений  $x$  и  $y$  выполнено равенство:  
$$f(x) + f(x - y) + f(y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 3.$$

Продолжительность выполнения задания – 3 часа 30 минут.